



## עבודת קיץ לתלמידי 5 יחל העולים לכיתה יא'

תלמידים יקרים,

עבודה זו ניתנת, על מנת שהידע אותו רכשתם בשנת הלימודים, שזה עתה הסתיימה, לא ישכח! כדי לממש מטרה זו, עליכם לחלק את העבודה, כך שכל יום או יומיים, תפתרו 3 תרגילים, אחד מכל סוג.

שימו לב!

1. בסוף חודש ספטמבר יערך המבחן הראשון במתמטיקה והוא יכלול 2 שאלות מתוך עבודת הקיץ, בנוסף לשאלות מהחומר שיילמד בתחילת השנה הבאה.
  2. עליכם להגיש את העבודה ביום המבחן. יש לדאוג להגשה מסודרת של כל התרגילים.
  3. ישנם תרגילים שלידם רשום "רשות". אין חובה לפתור אותם. הם נועדו לתרגול נוסף.
- הציון במבחן זה, כמו גם הציון על העבודה, יהוו ציונים ראשונים במחצית א' של שנת הלימודים הבאה.

אנו מאחלות לכן ולכם, חופשת קיץ נעימה, מהנה ובטוחה.

צוות מתמטיקה ♥

• העבודה נערכה ע"י זיוה אלוש

## דיפרנציאלי תרגילים

### ח. גירת פונקציות פולינום

1. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + a^2$ ,  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.
  - א. הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקבל בנקודה שבה  $y > 0$ .
  - ב. מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכים של  $a$  נקודת המינימום של הפונקציה:
    - (1) נמצאת על ציר ה- $x$ .
    - (2) נמצאת מעל ציר ה- $x$ .
    - (3) נמצאת מתחת לציר ה- $x$ .
  - ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל אחד משלושת המקרים שבסעיף ב.
  - ד. כמה פתרונות יש למשוואה  $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 = 0$ ? נמק.

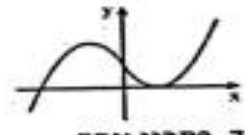
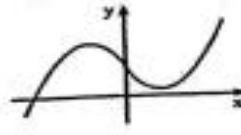
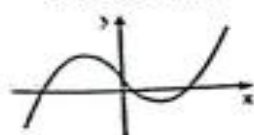
פתרון:

א. שיעור ה- $y$  בנקודת המקסימום הוא  $\frac{2}{3}a^3 + a^2$ .

מאחר ו- $a > 0$  שיעור ה- $y$  הוא חיובי.

ב. (1)  $a = 1.5$ . (2)  $0 < a < 1.5$ . (3)  $a > 1.5$ .

ג. עבור  $a = 1.5$ : עבור  $0 < a < 1.5$ : עבור  $a > 1.5$ :



ד. פתרון אחד.

2.



בציור מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - ax$ .  
א. ישר המשיק לגרף של  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , מקביל לציר ה- $x$ . מצא את הערך של  $a$ .

הצב את הערך של  $a$  שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.  
ב. (1) מצא את נקודות החיתוך של הגרף של  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

(2) על פי הגרף של  $f(x)$ , קבע את התחומים שבהם  $f(x)$  שלילית ואת התחומים שבהם  $f(x)$  חיובית.

(3) נגזרת של הפונקציה  $g(x)$  מקיימת  $g'(x) = f(x)$ . מצא את שיעורי ח- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , וקבע את סוגן. נמק.

פתרון: א. 1. ב. (1)  $(0;0)$ ,  $(1;0)$ ,  $(-1;0)$ . (2) שלילית:  $x < -1$  או  $0 < x < 1$ . חיובית:  $-1 < x < 0$  או  $x > 1$ . (3)  $x = -1$  מינימום,  $x = 0$  מקסימום,  $x = 1$  מינימום. ג.  $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 7$ .

1

1. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$  היא  $(1,0)$ . מצא את:

- ערכם של הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- נקודות הקיצון ואת סוגן.
- נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.
- תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטוט של גרף הפונקציה.
- מציא באיזה תחום הפונקציה שלילית ועולה.
- לתלמידי 5 יח' בלבד: הגדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = |f(x)|$ . מצא את נקודות הקיצון שלה ואת סוגן.

2. לתלמידי 5 יח' בלבד: הפונקציה  $f(x) = (x-b) \cdot (x+1)^2$  חותכת את ציר ה- $x$  בשתי נקודות.

שהמרחק ביניהן 6 יח' מצא את:

- ערכו של הפרמטר  $b$  ( $b > -1$ ).
- נקודות הקיצון ואת סוגן.
- נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.
- תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטוט של גרף הפונקציה.
- נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 9a^2x$ . הבע באמצעות הפרמטר החיובי  $a$ , במידת הצורך, את:
  - נקודות הקיצון ואת סוגן.
  - נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.
  - תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - שרטוט של גרף הפונקציה.
  - מעבירים משיקים לגרף הפונקציה בנקודות הקיצון שלה. המרחק בין המשיקים הוא 108 יח'. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

### אנליזה תרגילים - פתרונות

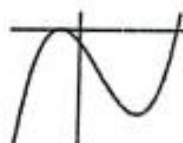


1. א.  $a = 1, b = -2$ . ב.  $\text{Min}(1, 0)$ ,  $\text{Max}(\frac{1}{3}, \frac{4}{27})$ . ג.  $(1,0)$ ,  $(0,0)$ .

ד. עולה:  $x < \frac{1}{3}$  או  $1 < x$ ; יורדת:  $\frac{1}{3} < x < 1$ . ה. למטה. ו.  $x < 0$ .

ז.  $\text{Min}(0,0)$ ,  $\text{Max}(\frac{1}{3}, \frac{4}{27})$ ,  $\text{Min}(1,0)$ .

2. א.  $b = 5$ . ב.  $\text{Max}(-1, 0)$ ,  $\text{Min}(3, -32)$ . ג.  $(-1, 0)$ ,  $(0, -5)$ ,  $(5, 0)$ . ד. עולה:  $x < -1$  או  $3 < x$ ; יורדת:  $-1 < x < 3$ . ה. למטה.



3. א.  $\text{Max}(a, 4a^3)$ ,  $\text{Min}(3a, 0)$ . ב.  $(0,0)$ ,  $(3a,0)$ .

ג. עולה:  $x < a$  או  $3a < x$ ; יורדת:  $a < x < 3a$ . ד. למטה. ה.  $a = 3$ .



## חקירת פונקציה מורכבת

א. חקור את הפונקציה:  $f(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x)^3$  לפי הסעיפים הבאים:

1. נקודות החיתוך עם הצירים.
2. נקודות הקיצון וסוגן (במידה וקיימת נקודת פיתול - ציין אותה).
3. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

סעיפי חקירה מתקדמים המתייחסים לחקירה שכבר בוצעה:

- ג. מצא עבור אילו ערכי  $x$ :
  1. מתקיים עבור גרף הפונקציה:  $0 < f(x)$ .
  2. מתקיים עבור הנגזרת:  $f'(x) < 0$ .
- ד. מבלי לפתור נשירות את המשוואה, מצא כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = 60$ .
- ה. מצא עבור אילו ערכי  $m$  יהיו לשר  $y = m$  שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ו. מצא עבור אילו ערכי  $k$  יהיו למשוואה  $f(x) = k$  שלושה פתרונות.
- ז. מצא עבור אילו ערכי  $k$  יש שיק הישר  $y = k$  לגרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ח. מצא עבור אילו ערכי  $n$  חותך הישר  $x = n$  את גרף הפונקציה בנקודה הנמצאת על אחד הצירים.

סעיפי חקירה מתקדמים המתייחסים להגדרת פונקציה חדשה:

- ט. מגדירים פונקציה חדשה:  $g(x) = -f(x)$ .
  1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
  2. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
  3. מצא עבור אילו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  אינו חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$ .

י. מגדירים פונקציה חדשה:  $h(x) = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ .

1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .
2. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודות הקיצון של גרף הפונקציה  $h(x)$ .

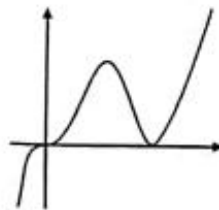
יא. מגדירים פונקציה חדשה:  $p(x) = f(x) - 30$ .

1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $p(x)$ .
2. מצא כמה פתרונות יש למשוואה:  $p(x) = 0$ .

יב. מגדירים פונקציה חדשה:  $n(x) = |f(x)|$ .

1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $n(x)$ .
2. מצא כמה נקודות קיצון יש לגרף הפונקציה  $n(x)$ .

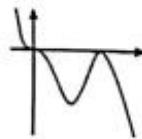
פתרון:



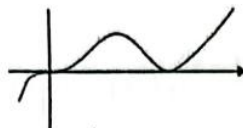
- א. (1)  $(3, 0)$ ,  $(0, 0)$  (2)  $\min(3, 0)$ ,  $\max(1, 64)$ .  
 הנקודה  $(0, 0)$  היא נקודת פיתול.  
 ב. השרטוט משמאל.

- ג. (1)  $x < 3$  או  $0 < x < 3$  (2)  $1 < x < 3$ .  
 ד. שלושה.  
 ה.  $m = 0, 64$ .  
 ו.  $0 < k < 64$ .  
 ז.  $p = 0, 64$ .  
 ח.  $n = 0, 3$ .

עיפי חקירה מתקדמים המתייחסים להגדרת פונקציה חדשה:



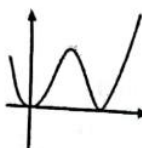
- ט. (1) השרטוט משמאל.  
 (2)  $\min(1, -64)$ ,  $\max(3, 0)$   
 (3) אף  $k$ .



- י. (1) השרטוט משמאל.  
 (2)  $y = -8x + 24$ .



- יא. (1) השרטוט משמאל.  
 (2) שלושה.

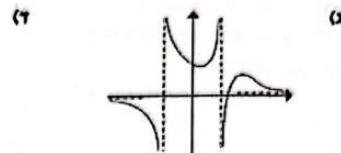
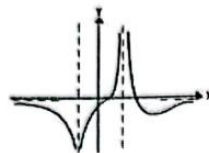


- יב. (1) השרטוט משמאל.  
 (2) שלוש.

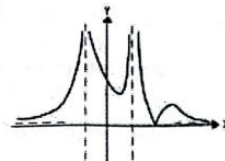
## חקירת פונקציות מנה

1. שתיים מהאסימפטוטות של הפונקציה:  $f(x) = a + \frac{2x^2 - x - 62}{b - x^2}$  נחתכות בנקודה (6,0).
- א. מצא את ערכם של הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
  - ב. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:
    - (הדרכה: סדר את הפונקציה באמצעות מכנה משותף לפני הסעיפים הבאים).
    1. תחום ההגדרה של הפונקציה.
    2. נקודות החיתוך עם הצירים.
    3. נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.
    4. תחומי העליה והירידה.
    5. האסימפטוטות המקבילות לצירים.
  - ג. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - ד. שרטט את גרף הנגזרת  $f'(x)$ .
  - ה. מצא באילו תחומים מתקיים:  $f(x) \cdot f'(x) < 0$ .
  - ו. מצא עבור אילו ערכי  $k$ , הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות.
  - ז. מבלי לפתור ישירות את המשוואה, מצא כמה פתרונות יש:
    1. למשוואה:  $f(x) = -2$ .
    2. למשוואה:  $f^2(x) = 1$ .
  - ח. מצא עבור אילו ערכי  $p$ , למשוואה:  $f(x) = p$  יש פתרון אחד.
  - ט. מגדירים פונקציה חדשה:  $f(x) \cdot f'(x) = 8$ . מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודת המינימום של גרף הפונקציה  $f(x)$  ודרך נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- $x$ .
  - י. מגדירים פונקציה חדשה:  $g(x) = |f(x)|$ .
    1. מבלי לבצע חקירה, שרטט את גרף הפונקציה  $g(x)$ .
    2. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה ואת סוגן.
    3. מצא בכמה נקודות הנגזרת  $g'(x)$  מתאפסת.
  - יא. מגדירים פונקציה:  $p(x) = f(x) + u$ . מצא עבור אילו ערכי  $u$ , גרף  $p(x)$  משיק לציר ה- $x$ .
  - יב. מגדירים פונקציה חדשה:  $h(x) = -f'(x)$ .
    1. מבלי לבצע חקירה נוספת, שרטט את גרף הפונקציה  $h(x)$ .
    2. חשב את שטח המלבן הכלוא בין הישר המשיק לגרף הפונקציה  $h(x)$  בנקודת המקסימום שלה, לבין שלוש האסימפטוטות של גרף הפונקציה.
    - ג. מצא עבור אילו ערכי  $u$ , הישר  $x = u$  אינו חותך את גרף הפונקציה המקורית  $f(x)$ .

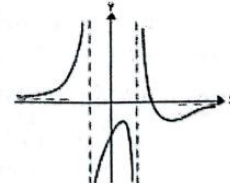
- פתרון: 1. א.  $b = 36, a = 2$
- ב. 1.  $x \neq \pm 6$ . 2.  $(10, 0)$ . 3.  $\min(2, 0.25), \max(18, 0.027)$ .
4. עולה:  $6 < x < 18$  או  $2 < x < 6$ ; יורדת:  $x > 18$  או  $-6 < x < 2$  או  $x < -6$ .
5.  $x = -6, x = 6, y = 0$ .



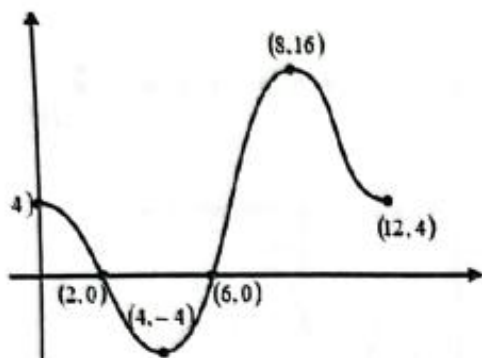
- ה.  $-6 < x < 2$  או  $6 < x < 10$  או  $18 < x$
- ו.  $0.25 < k$  או  $0 < k < 0.027$  או  $k < 0$
- ז. 1. שניים. 2. ארבעה.
- ח.  $p = 0.027, 0.25$
- ט.  $y = -0.25x + 2.5$
- י. 1.  $n = -0.027, -0.25$
2.  $\min(2, 0.25), \min(10, 0), \max(18, 0.02)$ . 3. שתיים.



- יא.  $n = -0.027, -0.25$
- יב. 1.  $m = -6.6$
2. 3 יחיד.

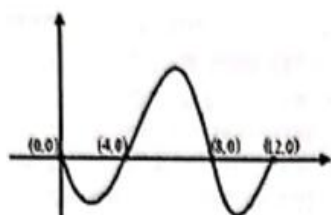


יג.  $m = -6.6$



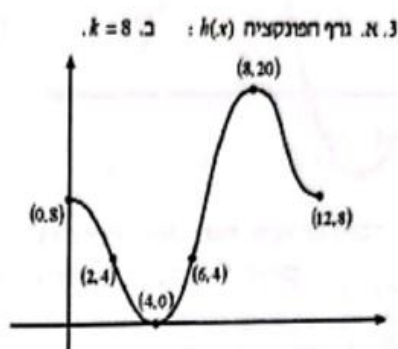
2. נתון גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq 12$ . בסעיפים הבאים יש לשרטט את הסקיצות המבוקשות רק בתחום  $0 \leq x \leq 12$ , אלא אם מצוין אחרת. ככל שניתן, ציינו ליד נקודות קיצון ונקודות החיתוך עם הצירים, את השיעורים של אותן נקודות (בדומה לאופן שבו שיעורי הנקודות מופיעים בגרף הנתון).

1. מצא עבור אילו ערכי  $n$ , הישר  $y = n$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות בלבד.
2. שרטט סקיצה של גרף הנגזרת  $f'(x)$ . הנח כי הנגזרת מתאפסת בקצות התחום.
3. מגדירים פונקציה חדשה:  $h(x) = f(x) + 4$ .
  - א. שרטט את גרף הפונקציה  $h(x)$ . הקפד על רישום שיעורי הנקודות.
  - ב. מצא עבור אילו ערכי  $k$ , למשוואה  $h(x) = k$  יש שלושה פתרונות.
4. מגדירים פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x) - 4$ .
  - א. שרטט את גרף הפונקציה  $g(x)$ . הקפד על רישום שיעורי הנקודות.
  - ב. מצא עבור אילו ערכי  $x$  מתקיים:  $g(x) < 0$  וגם  $g'(x) < 0$ .
5. מגדירים פונקציה חדשה:  $k(x) = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ .
  - א. שרטט את גרף הפונקציה  $k(x)$ . הקפד על רישום שיעורי הנקודות.
  - ב. דרך כל אחת משתי נקודות הקיצון המוחלטות של גרף הפונקציה  $k(x)$  העבירו ישרים המקבילים לצירים. חשב את שטח המלבן שכלוא בין ארבעת הישרים.
6. מגדירים פונקציה חדשה:  $d(x) = -f(x)$ .
  - א. שרטט את גרף הפונקציה  $d(x)$ . הקפד על רישום שיעורי הנקודות.
  - ב. מצא באילו תחומים בגרף זה, הנגזרת  $d'(x)$  והפונקציה  $d(x)$  הן בעלות סימן שונה.
7. מצא כמה פתרונות יש למשוואה:  $f^2(x) = 4$ .
8. מגדירים פונקציה חדשה:  $s(x) = f^3(x)$ .
  - א. שרטט את גרף הפונקציה  $s(x)$ . הקפד על רישום שיעורי הנקודות.
  - ב. הישר  $y = k$  מרוחק במידה שווה מנקודת המקסימום המוחלט ומנקודות המינימום המוחלט של הפונקציה  $s(x)$ . מצא כמה פתרונות יש למשוואה:  $s(x) = k$ .
9. מגדירים פונקציה חדשה:  $z(x) = \sqrt{f(x)}$ .
  - א. שרטט את גרף הפונקציה  $z(x)$ . הקפד על רישום שיעורי הנקודות.
  - ב. הישר  $y = k$  מרוחק במידה שווה מנקודת המקסימום המוחלט ומנקודות המינימום המוחלט של הפונקציה  $z(x)$ . מצא כמה פתרונות יש למשוואה:  $z(x) = k$ .



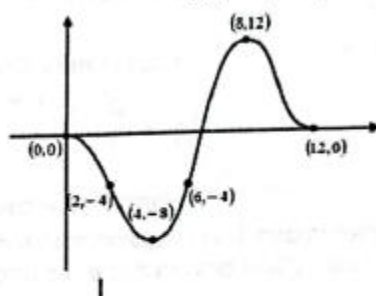
2. 1.  $4 < n < 16$  או  $-4 < n < 4$ . 2. גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

מחנך:

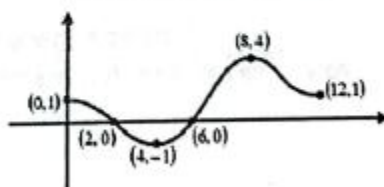


ב.  $0 < x < 4$ .

4. א. גרף הפונקציה  $g(x)$ :

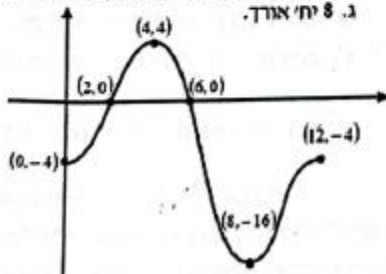


5. א. גרף הפונקציה  $k(x)$ : ב. 20 יח"ר.

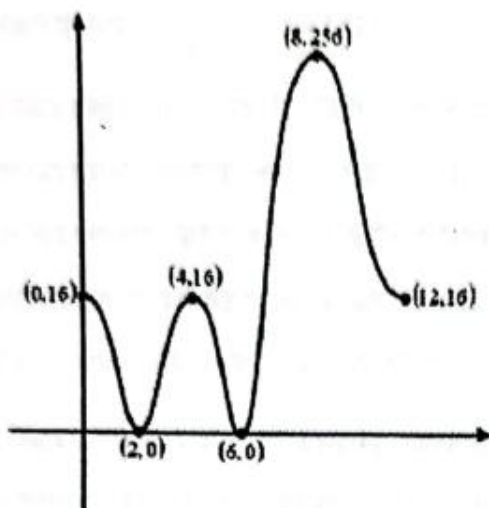


7. ארבעה.

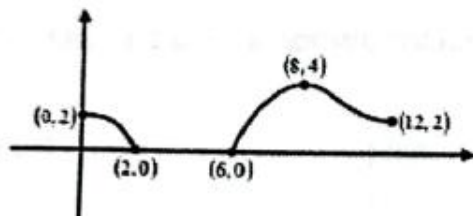
6. א. גרף הפונקציה  $d(x)$  למטה.  
ב.  $0 < x < 2$  או  $4 < x < 6$  או  $8 < x < 12$ .  
ג. 8 יח" אורך.



8. א. גרף הפונקציה  $s(x)$  משמאל.  
ב. שני פתרונות.



9. א. גרף הפונקציה  $z(x)$  משמאל.  
ב. שלושה.



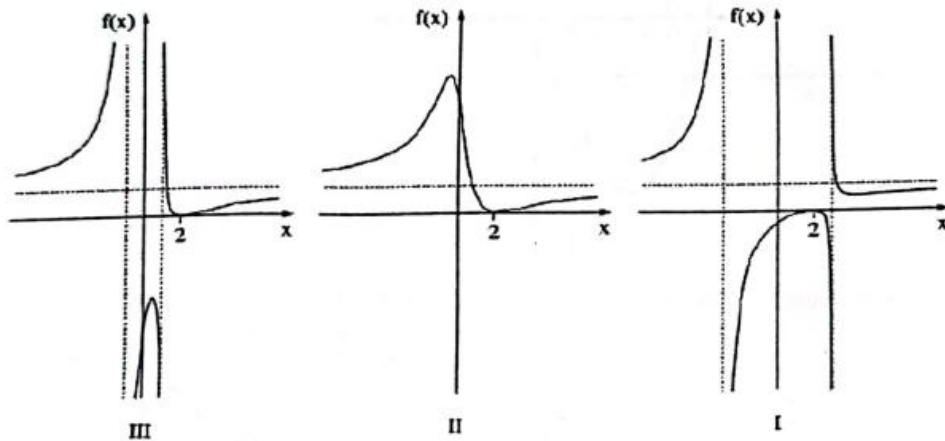
1. נתונה משפחת הפונקציות:  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a}$  ,  $a$  הוא פרמטר,  $a \neq 0$ ,  $a \neq 4$ .

ענה על סעיף א. הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך. הבחן בין  $a > 0$  ובין  $a < 0$  במידת הצורך.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.
- (3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$  המקבילה לציר ה- $x$ .
- (4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $x$  (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך. הבחן בין  $a > 4$  ובין  $a < 4$  במידת הצורך.

- ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- ג. לפיך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה  $f(x)$ , כל אחד עבור ערך אחר של  $a$ . כתוב מהו תחום הערכים של  $a$  המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III. נמק את תשובתך.



### תשובות:

א. (1) עבור  $a < 0$ : כל  $x$ .

עבור  $a > 0$ :  $x \neq \sqrt{a}$ ,  $x \neq -\sqrt{a}$ .

(2)  $(0, -\frac{4}{a})$ ,  $(2, 0)$ .

(3)  $y = 1$ .

(4) עבור  $a < 0$ : אין.

עבור  $a > 0$ :  $x = -\sqrt{a}$ ,  $x = \sqrt{a}$ .

ב. עבור  $a > 4$ : מקסימום  $(2, 0)$ , מינימום  $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$ .

עבור  $a < 4$ : מינימום  $(2, 0)$ , מקסימום  $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$ .

ג. I:  $a > 4$ .

II:  $a < 0$ .

III:  $0 < a < 4$ .

2. נתונה הפונקציה  $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ .  $a$  הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות  $a$  במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

נתון כי גרף הפונקציה  $f(x)$  משיק לציר ה- $x$ .

ב. מצא את  $a$ .

הצב את הערך של  $a$  שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. נתונה הפונקציה  $g(x) = |f(x) + k|$ .

ידוע שגרף הפונקציה  $g(x)$  משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

מצא את  $k$  (ומציא את שתי האפשרויות). נמס את תשובתך.

תשובה:

א. (1)  $x \neq 2$

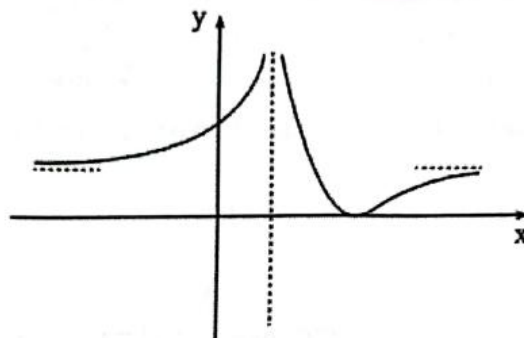
(2)  $y = a, x = 2$

(3) מינימום.  $(3; a-1)$

(4) עלייה:  $x > 3$  או  $x < 2$ ; ירידה:  $2 < x < 3$ .

ב.  $a = 1$

ג.



ד.  $k = -1$  או  $k = 1$ .

3. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2 + 4x}{x^2 + 3x + b}$

a ו-b הם פרמטרים.

נתון:  $x=1, y=1$  הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים

(אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים

(מלבד  $x=1$  ו- $y=1$ )? הסבר.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים:  $|f(x)| = -f(x)$ . נמק.

א.  $b = -4, a = 1$

ב. (1)  $x \neq 1, x \neq -4$

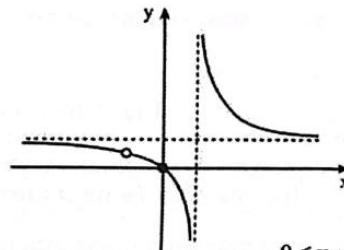
(2)  $(0;0)$

(3) אין. יש "חור" ב- $(-4; \frac{4}{3})$

(4) ירידה:  $1 < x$  או  $-4 < x < 1$  או  $x < -4$

עלייה: אין.

ג.



ד.  $0 \leq x < 1$

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 - 6x + 9}$

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים

(אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. (1) מצא את האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  המקבילות

לצירים.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ . נמק.

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים.  
 (3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.  
 (4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.  
 ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים: פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  חיובית.  
 נמק.

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$ .

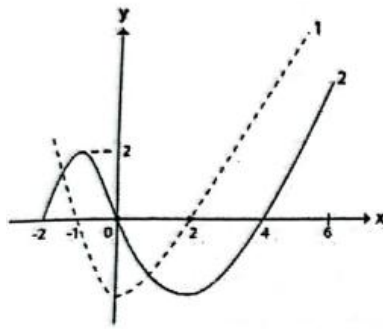
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.  
 (3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.  
 (4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.  
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ב. לפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות פיתול בלבד.  
 על סמך הגרף של הפונקציה  $f(x)$ , ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

7. נתונה הפונקציה  $y = \frac{x^3+a}{x^2}$ . הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = -1$

- חותך את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0, 12)$ .  
 א. מצא את  $a$ .  
 ב. מצא את תחום ההגדרה ואת נקודת החיתוך עם ציר ה- $x$ .  
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.  
 ד. מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר ה- $x$ .  
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ו. הוכח שעבור  $x > 0$  מתקיים אי השוויון  $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ .

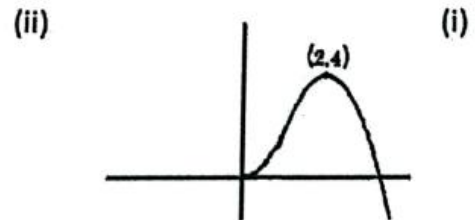
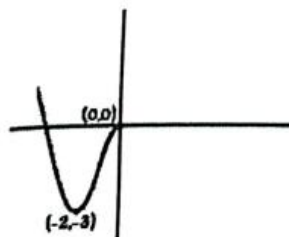
8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{(x-3b)^2}{(x-b)^4}$ ,  $b > 0$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.  
 ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.  
 ד. מצא את ערכי  $x$  שעבורם  $f'(x) = 0$ .  
 ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

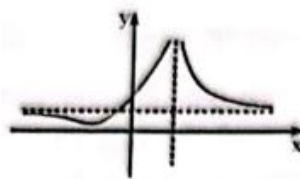


9. נתונים גרפים של הפונקציה  $f(x)$  ושל נגזרתה  $f'(x)$  בתחום:  $-2 \leq x \leq 6$ .
- התאם בין מספרי הגרפים (1 ו-2) לבין  $f(x)$  ו- $f'(x)$ .
  - מצא את תחומי העלייה והירידה של גרף  $f(x)$ .
  - מצא באילו תחומים הנגזרת השנייה  $f''(x)$  חיובית.
  - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $x = -1$ .
  - מצא באילו תחום מתקיים:  $f'(x) \cdot f(x) > 0$ .

10. בתרגילים הבאים משורטט גרף הנגזרת  $f'(x)$ . ידוע שהנגזרת השנייה  $f''(x)$  היא זוגית. השלימו את השרטוט ומצאו:
- כמה נקודות חיתוך יש לגרף הנגזרת  $f'(x)$  עם הצירים.
  - את נקודות הקיצון של גרף הנגזרת  $f'(x)$  ואת סוגן.
  - בכמה נקודות חותך הישר  $y = -3$  את גרף הנגזרת  $f'(x)$ .



פתרונות אנליזה:



(4)

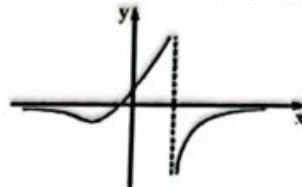
4. א. (1)  $y = 1, x = 3$

(2)  $(0; 1\frac{1}{3})$

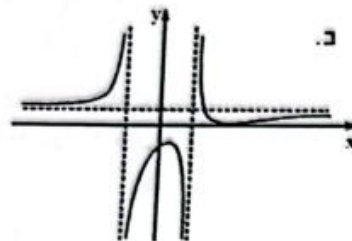
(3) עלייה:  $-3.5 < x < 3$

ירידה:  $x < -3.5$  או  $x > 3$

ב. (1)  $y = 0, x = 3$  (2)



ב.



5. א. (1)  $x \neq -1, x \neq 1$

(2)  $y = 1, x = -1, x = 1$

(3)  $(2; 0), (0; -4)$

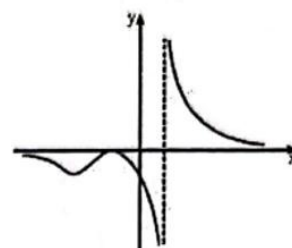
(4)  $(2; 0)$  מינימום,  $(\frac{1}{2}; -3)$  מקסימום.

ג.  $1 < x < 2$

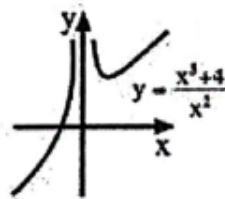
6. א. (1)  $x \neq 1$  (2)  $y = 0, x = 1$  (3)  $(-2; 0), (0; -4)$

(4)  $(-2; 0)$  מקסימום,  $(-8; -\frac{4}{81})$  מינימום.

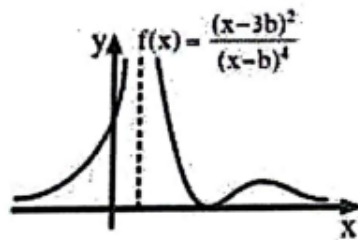
(5)



ב. נקודת פיתול אחת נמצאת בתחום  $x < -8$ , ונקודת פיתול שנייה בתחום  $-8 < x < -2$ .



7. א.  $a = 4$ .  
 ב.  $(\sqrt[3]{-4}, 0)$ ,  $x \neq 0$ .  
 ג.  $(2, 3)$  מינימום.  
 ד.  $x = 0$ .



8. א.  $x \neq b$ .  
 ב.  $y = 0$ ,  $x = b$ .  
 ג.  $(0, \frac{9}{b^2})$ ,  $(3b, 0)$ .  
 ד.  $x = 3b$ .  
 ה. עולה:  $x < b$  או  $3b < x < 5b$ .  
 ו. יורדת:  $b < x < 3b$  או  $x > 5b$ .

9. א. גרף 2 הוא  $f(x)$  וגרף 1 הוא  $f'(x)$  (ניתן להבין זאת מחלקו השמאלי של השרטוט).  
 ב. עליה:  $2 < x < 6$  או  $-2 < x < -1$ , ירידה:  $-1 < x < 2$ . ג.  $0 < x < 6$ .  
 ד.  $y = 2$  (ה)  $4 < x \leq 6$  או  $0 < x < 2$  או  $-2 < x < -1$ .

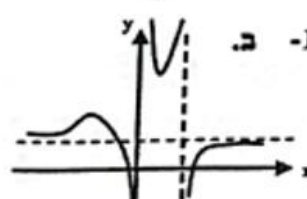
10. (i) א. שלוש. ב.  $Min(-2, -4)$ ,  $Max(2, 4)$ . ג. שלוש.  
 (ii) א. שלוש. ב.  $Min(-2, -3)$ ,  $Max(2, 3)$ . ג. שתיים.

1. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a}{x} - \frac{4a}{x-1} + b$  (א ו- b פרמטרים חיוביים).

- א. חקור את הפונקציה  $f(x)$  ומצא (הבע באמצעות a ו- b לפי הצורך):  
 (1) תחום הגדרה (2) אסימפטוטות מקבילות לצירים (3) נקודות קיצון  
 (4) תחומי עלייה וירידה  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. לישר  $y = k$  אין אף נקודה משותפת עם גרף הפונקציה  $f(x)$  עבור  $3 < k < 11$ .  
 מצא את a ואת b.

פתרון:  
 א. (1)  $x \neq 0, 1$  (2)  $x = 0, x = 1, y = b$  (3)  $(\frac{1}{3}, 9a + b)$  מינימום,

$(-1, a + b)$  מקסימום (4) תחום עלייה:  $x < -1$  או  $\frac{1}{3} < x < 1$  או



$x > 1$ , תחום ירידה:  $0 < x < \frac{1}{3}$  או  $-1 < x < 0$ . ב.

ג.  $b = 2, a = 1$

2. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{12x}{x^2 + 5} - 2$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא נקודות חיתוך עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון ואת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- מצא אסימפטוטות מקבילית לצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בנקודה על גרף הפונקציה, שבה  $x = a$  מעבירים משיק לגרף הפונקציה. מצא את  $a$  עבורו שיפוע המשיק הוא מקסימלי.
- מצא את משוואת ישר המאונך למשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף ו'.

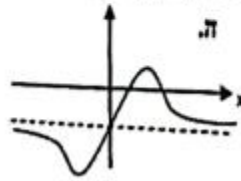
פתרון:

א. כל  $x$  ב.  $(1;0)$ ,  $(5;0)$ ,  $(0;-2)$  ג.  $(\sqrt{5};0.683)$  מקסימום,

$(-\sqrt{5};-4.683)$  מינימום,  $(0;-2)$  פיתול,  $(\sqrt{15};0.32)$  פיתול

ה.  $y = -2$  ד.  $(-\sqrt{15};-4.324)$  פיתול

ו.  $a = 0$  ז.  $y = -\frac{5}{12}x - 2$

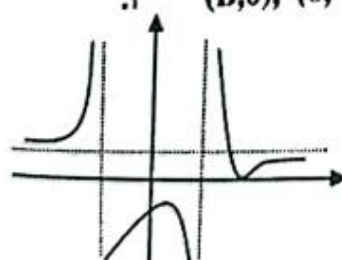


5. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{(x-B)^2}{x^2-4}$ ,  $B > 2$ .

- מצא: (הבע את תשובותיך בעזרת  $B$  לפי הצורך):
  - את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - אסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
  - נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
  - נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
  - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - הראה כי נקודות הקיצון של הפונקציה ונקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$  נמצאות על ישר אחד.
  - נתון כי הישר עליו נמצאות נקודות הקיצון של הפונקציה ונקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  זווית בת  $45^\circ$ . מצא את  $B$  ואת משוואת הישר.
  - דרך נקודת המינימום של הפונקציה עובר ישר המאונך לישר שמצאת בסעיף ח'. ישר זה הותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות נוספות, שאחת מהן נמצאת בתחום בו הפונקציה חיובית ויורדת.
  - מצא את שיעוריה (עגל תוצאות לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

פתרון:

א.  $x \neq \pm 2$  ב.  $x = -2$ ,  $x = 2$  ג.  $(B,0)$ ,  $(0, -\frac{B^2}{4})$  ד.  $(\frac{4}{B}, \frac{4-B^2}{4})$  מקסימום,  $(B,0)$  מינימום



ה. תחום עלייה:  $x > B$  או

$-2 < x < \frac{4}{B}$ , תחום ירידה:  $x < -2$

ו.  $\frac{4}{B} < x < 2$ ,  $2 < x < B$  ז.  $y = x - 4$ ,  $B = 4$  ח.  $(2.37; 1.63)$

## חקירת פונקציית שורש

127

1. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 15}$

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה.
  2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
  3. נקודות החיתוך עם הצירים.
  4. תחומי העליה והירידה.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. מצא באילו תחומים מתקיים:  $f'(x) \cdot f(x) < 0$ .

2. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 27)$

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה.
  2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
  3. נקודות החיתוך עם הצירים.
  4. תחומי העליה והירידה.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. הנדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = 3 \cdot |f(x)|$ . מצא את נקודות הקיצון של גרף  $g(x)$  ואת סוגן.

3. לפונקציה  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{m - 2x}$  יש נקודת קיצון פנימית הנמצאת על הישר  $y = 128$ .

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. ערכו של  $m$  ואת תחום ההגדרה.
  2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
  3. נקודות החיתוך עם הצירים.
  4. תחומי העליה והירידה.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה:  $f'(x) = f(x)$ , מבלי לפתור את המשוואה ישירות.

4. אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה:  $f(x) = ax^2 \cdot \sqrt{b - x}$  היא  $(4, 16)$ .

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. ערכם של  $a$  ו- $b$  ותחום ההגדרה.
  2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
  3. נקודות החיתוך עם הצירים.
  4. תחומי העליה והירידה.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. הנדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = -2 \cdot f(x)$ . מצא לאילו ערכי  $q$ , לישר  $y = p$  יהיו שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה  $g(x)$ .

5. לפונקציה:  $f(x) = x \cdot \sqrt{3bx - 3x^2}$  ( $0 < b$ ) יש נקודת קיצון פנימית ששיעור ה- $y$  שלה הוא 9.

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. ערכו של  $b$  ותחום ההגדרה.
  2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
  3. נקודות החיתוך עם הצירים.
  4. תחומי העליה והירידה.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. הנדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ . ישר המקביל לציר ה- $x$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה A וחותך את ציר ה- $y$  בנקודה B. ראשית הצירים בנקודה O. חשב את שטח המשולש  $\Delta ABO$ .

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$  ( $a > 0$ ). בחקירה השתמש בפרמטר  $a$ , במידת הצורך.

א. קבע האם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית, אי זוגית, או שאינה זוגית ואינה אי זוגית.

ב. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה.
  2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
  3. נקודות החיתוך עם הצירים.
  4. תחומי העליה והירידה.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ד. דרך נקודות הקיצון של גרף הפונקציה  $f(x)$  עוברים שני ישרים המקבילים לציר ה- $y$ . שני ישרים אלו יוצרים ריבוע עם ציר ה- $x$  והישר  $y = a^2$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

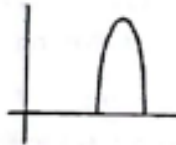
7. המרחק בין שתי האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + p}{\sqrt{x^2 - 4p^2}}$  הוא 4 יחי אורך.

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

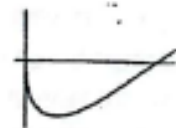
1. ערכו של  $p$  ותחום ההגדרה.
  2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
  3. נקודות החיתוך עם הצירים.
  4. האסימפטוטות לגרף הפונקציה.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. הגדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = -f(x) + m$ . נתון שהגרפים של הפונקציות  $g(x)$  ו- $f(x)$  משיקים זה לזה בשתי נקודות. מצא את ערכו של הפרמטר  $m$ .

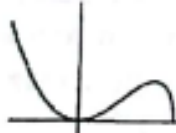
#### פתרונות:



1. א. 1.  $3 \leq x \leq 5$  2. פנימית:  $\text{Max}(4, 1)$ , קצה:  $\text{Min}(3, 0)$ ,  $\text{Min}(5, 0)$  3.  $(3, 0)$ ,  $(5, 0)$  4. עולה:  $3 < x < 4$ ; יורדת:  $4 < x < 5$ . ב. השרטוט משמאל. ג.  $4 < x < 5$ .



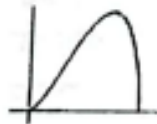
2. א. 1.  $0 \leq x$  2. פנימית:  $\text{min}(9, -5)$ , קצה:  $\text{max}(0, 0)$  3.  $(0, 0)$ ,  $(27, 0)$  4. עולה:  $9 < x$ ; יורדת:  $0 < x < 9$ . ב. השרטוט משמאל. ג.  $\text{min}(0, 0)$ ,  $\text{max}(9, 162)$ ,  $\text{min}(27, 0)$ .



3. א. 1.  $m = 20$ , תחום ההגדרה:  $x \leq 10$  2. פנימית:  $\text{Max}(8, 128)$ ,  $\text{Min}(0, 0)$  קצה:  $\text{Min}(10, 0)$  3.  $(0, 0)$ ,  $(10, 0)$  4. עולה:  $0 < x < 8$ ; יורדת:  $8 < x < 10$  או  $x < 0$ . ב. השרטוט משמאל. ג. שניים.



4. א. 1.  $a = 1, b = 5$ , תחום ההגדרה:  $x \leq 5$  2. פנימית:  $\text{max}(4, 16)$ ,  $\text{min}(0, 0)$  קצה:  $\text{min}(5, 0)$  3.  $(0, 0)$ ,  $(5, 0)$  4. עולה:  $0 < x < 4$ ; יורדת:  $4 < x < 5$  או  $x < 0$ . ב. השרטוט משמאל. ג.  $p = 0, -32$ .



5. א. 1.  $b = 4$ , תחום ההגדרה:  $0 \leq x \leq 4$  2. פנימית:  $\text{Max}(3, 9)$  קצה:  $\text{Min}(0, 0)$ ,  $\text{Min}(4, 0)$  3.  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$  4. עולה:  $0 < x < 3$ ; יורדת:  $3 < x < 4$ . ב. השרטוט משמאל. ג. 4.5 יח"ר.



6. א. זוגית. ב. 1.  $a \leq x$  או  $x \leq -a$  2. קצה:  $\text{Min}(-a, 0)$ ,  $\text{Min}(a, 0)$  3.  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  4. עולה:  $a < x$ ; יורדת:  $x < -a$ . ג. השרטוט משמאל. ד.  $a = 2$ .

### חקירת מנה עם שורש

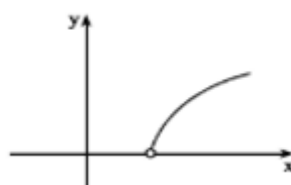
חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון (כולל הנקודות שבקצה תחום ההגדרה).
- ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
- ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

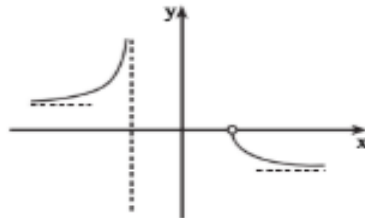
33.  $y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2}$

32.  $y = \frac{10 - 2x}{\sqrt{x^2 - 25}}$

31.  $y = \frac{x - 3}{\sqrt{2x - 6}}$



31. א.  $x > 3$ . ב. אין. ג. עלייה:  $x > 3$ ; ירידה: אין. ד. אין. ה. אין.



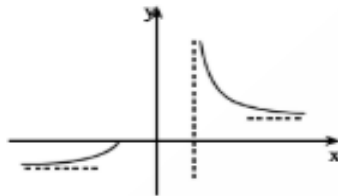
32. א.  $x < -5$  או  $x > 5$ .

ב. אין.

ג. עלייה:  $x < -5$ ; ירידה:  $x > 5$ .

ד. אין.

ה.  $x = -5$ ,  $y = -2$ ,  $y = 2$ .



33. א.  $x \leq -1$  או  $x > 2$ .

ב. מקסימום:  $(-1; 0)$ .

ג. עלייה:  $x < -1$ ; ירידה:  $x > 2$ .

ד.  $(-1; 0)$ .

ה.  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $y = -1$ .

3. לפונקציה  $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{k - x^2}}$  יש אסימפטוטה אנכית כאשר  $x = \sqrt{5}$ .

א. מצא את הערך של הפרמטר  $k$ .

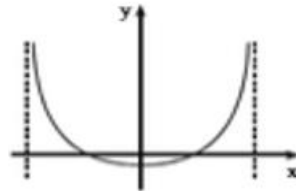
ב. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.

(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות אנכיות.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מצא נקודה הנמצאת על גרף הפונקציה ברביע השני שמרחקה

מציר ה- $x$  שווה למרחקה מציר ה- $y$ .



3. א. 5. ב. (1)  $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ .

(2) מינימום:  $(0; -0.447)$ .

(3) עלייה:  $0 < x < \sqrt{5}$ ; ירידה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ .

(4)  $(0; -0.447)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(1; 0)$ .

(5)  $x = -\sqrt{5}$ ,  $x = \sqrt{5}$ .

ד.  $(-1.8305; 1.8305)$ .

4. נתונה הפונקציה  $y = \frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{x^3}$ ,  $b > 0$ .

א. המרחק בין נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  הוא 2.

מצא את ערך הפרמטר  $b$ .

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.

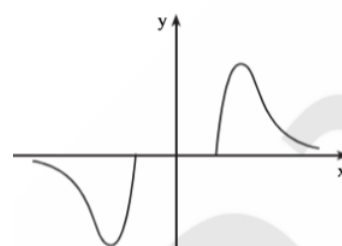
(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.

(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מצא לאילו ערכים של  $k$  הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה:

(1) באף נקודה. (2) בנקודה אחת. (3) ב-2 נקודות.



4. א. 1.

ב. (1)  $x \leq -1$  או  $x \geq 1$ . (2)  $(1; 0)$  מינימום,

$(-1; 0)$  מקסימום,  $(\sqrt{1.5}; 0.385)$  מקסימום,

$(-\sqrt{1.5}; -0.385)$  מינימום.

(3) עלייה:  $1 < x < \sqrt{1.5}$  או  $-\sqrt{1.5} < x < -1$ ;

ירידה:  $x > \sqrt{1.5}$  או  $x < -\sqrt{1.5}$ .

(4)  $(-1; 0)$ ,  $(1; 0)$ . (5)  $y = 0$ .

ד. (1)  $k > 0.385$  או  $k < -0.385$ . (2)  $k = 0.385$ ,  $k = -0.385$ .

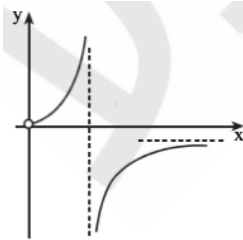
(3)  $-0.385 < k < 0.385$ .

23. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x}-x}$ .

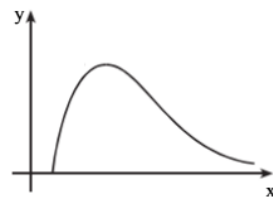
- שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=4$  הוא  $\frac{1}{4}$ .  
 א. מצא את הערך של  $a$ .  
 ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ג. הוכח שהפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
 ד. הוכח שלגרף הפונקציה אין נקודות חיתוך עם הצירים.  
 ה. מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ז. לאילו ערכי  $k$  אין פתרון למשוואה  $f(x)=k$ ?

24. לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{cx^2}$  יש קיצון בנקודה  $(8; \frac{\sqrt{2}}{8})$ .

- א. חשב את  $a$  ואת  $c$ .  
 ב. חקור את הפונקציה ומצא:  
 (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.  
 (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



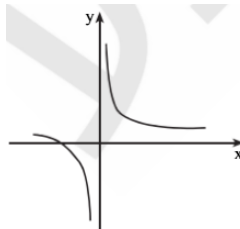
23. א. 1.  
 ב.  $x \neq 1, x > 0$ .  
 ג.  $y = -1, x = 1$ .  
 ד.  $-1 \leq k \leq 0$ .



24. א.  $c = \frac{1}{8}, a = 6$ .  
 ב. (1)  $x \geq 6$ . (2)  $(6; 0)$  מינימום,  
 מקסימום  $(8; \frac{\sqrt{2}}{8})$ .  
 (3) עלייה:  $6 < x < 8$ ; ירידה:  $x > 8$ .  
 (4)  $(6; 0)$ . (5)  $y = 0$ .

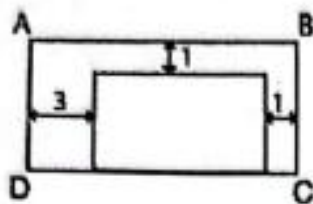
28. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x+a}}{x}$ .

- שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=2$  הוא  $-\frac{3}{8}$ .  
 א. מצא את הערך של  $a$ .  
 ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.  
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.  
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ה. האם קיימת נקודה המשותפת לגרף הפונקציה ולאסימפטוטה האופקית שלו? אם כן, מצא את שיעוריה.  
 ו. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = 3f(x) + k$ . הישר  $y=5$  הוא אסימפטוטה של הפונקציה  $g(x)$ . מצא את הערך של  $k$ .



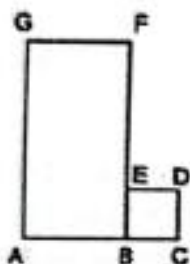
28. א. 2.  
 ב. תחום הגדרה:  $x \geq -2, x \neq 0$ .  
 אסימפטוטות:  $x=0, y=1$ .  
 ג.  $(-2; 1)$  מקסימום.  
 ה. כן,  $(-2; 1)$ .  
 ו. 2.

## בעיות קיצון תרגילים



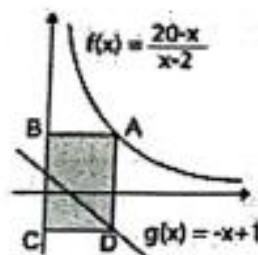
1. בתוך המלבן ABCD חסום מלבן. צלעותיו של המלבן הפנימי מקבילות לצלעות המלבן ABCD. נתונים האורכים שבשרטוט בס"מ. שטחו של המלבן ABCD הוא 100 סמ"ר. מצא את אורכי צלעותיו של המלבן ABCD שעבורן יהיה (אין קשר בין הסעיפים):
- היקף המלבן הפנימי מינימלי.
  - שטח המלבן הפנימי מקסימלי.

פתרון: א. 10 ס"מ, 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ, 20 ס"מ.



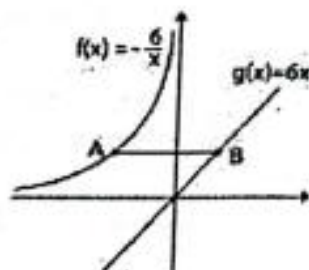
2. בשרטוט מופיעים הריבוע BCDE והמלבן ABFG צמודים זה לזה כך שהנקודות A, B, C ו- D נמצאות על ישר אחד. שטח הצורה המאוחדת כולה הוא 5 סמ"ר. נתון:  $AB = 2BC$ .
- חשב את אורך BC, שעבורו ההיקף החיצוני של הצורה כולה הוא מינימלי.
  - חשב את ההיקף המינימלי.

פתרון: א. 1 ס"מ. ב. 10 ס"מ.



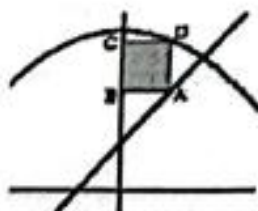
3. בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{20-x}{x-2}$  והישר  $g(x) = -x+1$ . הנקודות A ו- D נמצאות בהתאמה על גרף הפונקציה  $f(x)$  ועל הישר  $g(x)$  כך שהישר AD מקביל לציר ה-y. הנקודות B ו- C נמצאות על ציר ה-y כך שמתקבל המלבן ABCD. חשב את ההיקף המינימלי של המלבן ABCD.

פתרון: 28 יח' אורך.



4. הנקודות A ו- B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציה:  $f(x) = -\frac{6}{x}$  ושל הישר  $g(x) = 6x$  כמתואר בשרטוט. הישר AB מקביל לציר ה-x. חשב את אורכו המינימלי של הישר AB.

פתרון: 2 יח' אורך.



5. הנקודה A נמצאת על הישר  $y = 6x + 6$ , והנקודה D נמצאת על הפרבולה  $f(x) = -x^2 + 21$  כמתואר בשרטוט. הנקודות B ו- C נמצאות על ציר ה-y כך שמתקבל המלבן ABCD.
- חשב את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.
  - כאשר שטח המלבן ABCD מקסימלי, חשב את היקפו.

6. במשולש שווה-צלעות שהיקפו  $3a$  חסום מלבן. שניים מקדקודיו של המלבן נמצאים על הבסיס וכל אחד מהקדקודים הנותרים - על אחת משוקיו. מצא מה צריכים להיות אורכי צלעותיו של המלבן, כדי ששטחו יהיה א. 8 יח"ר. ב. 18 יח' אורך.

תשובה:  $\frac{a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{2}$ .

7. דרך איזו נקודה על הפרבולה  $y = -x^2 + 4x$  צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים  $x=0$ ,  $x=4$  ו- $y=0$  יהיה מינימלי?

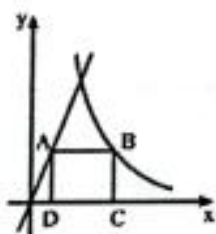
תשובה: (2;4).



8. חלקת אדמה מלבנית ABCD ששטחה  $k$  מ"ר, סמוכה בצדה האחד לחומה (ראה ציור). מגדירים את שלוש צלעות המלבן שאינן סמוכות לחומה. מצא את  $k$ , אם ידוע שאורך הגדר הוא מינימלי כאשר אורך כל קטע בצדדים הוא 15 מטר.

תשובה: 450.

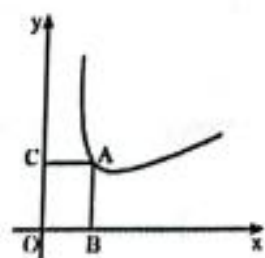
9. נקודה A נמצאת על הישר  $y = 3x$  ונקודה B על הפונקציה  $y = \frac{6}{x-2}$ . AB מקביל לציר ה- $x$ . AD ו-BC הם אנכים לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן ABCD. נסמן  $A(t; 3t)$ .



א. הבע באמצעות  $t$  את שיעורי הנקודה B.  
ב. מצא מה צריך להיות ערכו של  $t$ , כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי.

תשובה: א.  $(\frac{2}{t} + 2; 3t)$ . ב. 1.

10. נתונה הפונקציה  $y = kx + \frac{m}{x^2}$  (ברביע הראשון). מנקודה  $A(x_0; y_0)$  שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (ראה ציור).



ידוע כי כאשר שיעורי הנקודה A הם  $(1; 2)$  מתקבל המלבן שחיקפו הוא הקטן ביותר האפשרי. מצא את  $k$  ואת  $m$ .

תשובה:  $m=1, k=1$ .

בציור שלפניך משורטטים הגרפים של הפונקציות:

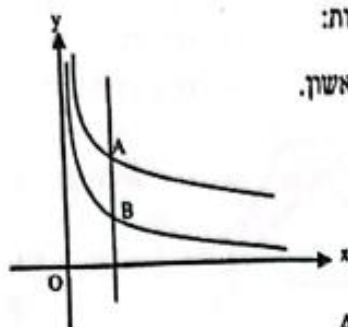
$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \text{ ו- } g(x) = \frac{4}{x^3} \text{ ברביע הראשון.}$$

הישר  $x=t$  הותך את גרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבורם שטח המשולש ABO מקסימלי.

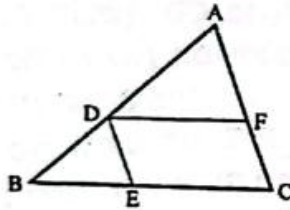
ב. מצא את השטח המקסימלי של המשולש ABO.

ג. השם את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g(x)$ , הקטע OA והקטע OB כאשר שטח המשולש ABO מקסימלי.



א.  $A(1; 10), B(1; 4)$  ב. 3 ג. 2.32

## גאומטריה תרגילים

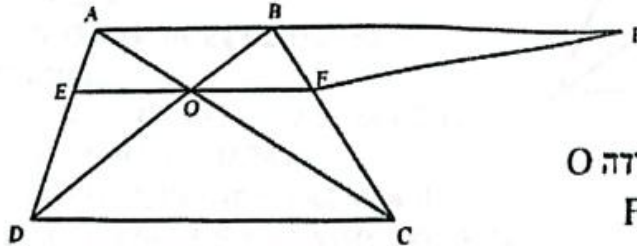


- 1) נתון משולש ABC. דרך הנקודה D שעל הצלע AB מעבירים ישרים מקבילים לצלעות AC ו-BC החותכים צלעות אלו בנקודות E ו-F בהתאמה. נסמן את השטחים:  $S_{\triangle ADE} = s_1$ ,  $S_{\triangle BDE} = s_2$ .  
 א. הבע באמצעות  $s_1$  ו- $s_2$  את שטח המשולש ABC.  
 ב. נתון כי שטח המקבילית CEDF הוא  $2s_2$ . הבע באמצעות  $s_1$  בלבד את שטח המשולש ABC.

7.12.1

ב.  $S_{\triangle ADE} = 4 \cdot s_1$

א.  $S_{ABCD} = (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2$



2) המרובע ABCD

הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).

נתון:  $DC = 2AB$ .

אלכסוני הטרפז נחתכים בנקודה O

(ראה ציור). הנקודות E ו-F

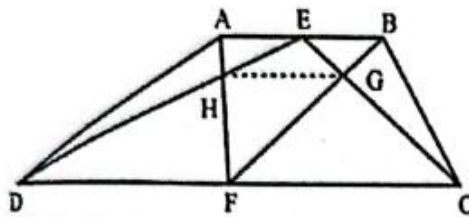
נמצאות על השוקיים AD ו-BC

בהתאמה, כך שהקטע EF עובר דרך הנקודה O ומקביל לבסיסי הטרפז.

הנקודה P נמצאת על המשך הבסיס AB כך שמתקיים:  $\frac{PB}{AB} = \frac{7}{3}$ .

הוכח כי שטח הטרפז APFO שווה לשטח המשולש ODC.

- 3) בטרפז ABCD, הנקודות E ו-F הן אמצעי הבסיסים AB ו-DC בהתאמה. הקטעים BF ו-CE נחתכים בנקודה G, והקטעים AF ו-DE נחתכים בנקודה H.



נתון:  $DC = 3 \cdot AB$ .

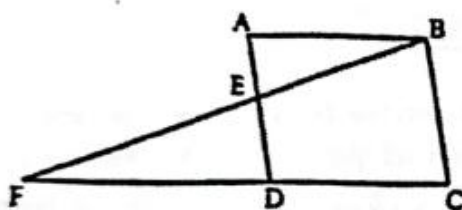
א. הוכח כי הקטע HG מקביל לבסיסי הטרפז.

ב. המשכי הקטעים FA ו-CE

נפגשים בנקודה K.

הוכח:  $KG = CG$ .

ג. פי כמה גדול שטח המשולש FKG משטח המשולש BCG?



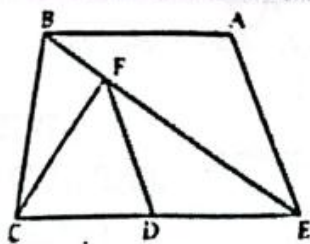
- 4) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD. המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F (ראה ציור). נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר.

שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.

א. מצא את שטח המשולש BED.

36 סמ"ר

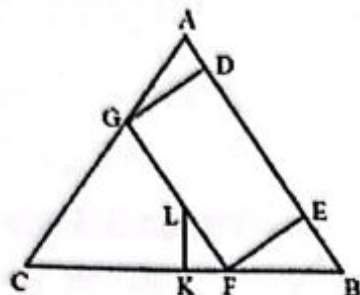
7.12.2



נתון טרפז  $ABCE$  ( $AB \parallel EC$ ).  
 הנקודה  $F$  נמצאת על האלכסון  $BE$   
 כך ש-  $CF \perp BE$ .  
 הנקודה  $D$  היא אמצע הבסיס  $CE$   
 (ראה ציור).

נתון:  $ED = 3a$ ,  $EA = 4a$ ,  $\angle CEB = \angle AEB$ .  
 א. הוכח כי  $\triangle EAB \sim \triangle EDF$ .

ב. נתון כי שטח המשולש  $EAB$  הוא  $S$ .  
 הבע באמצעות  $S$  את שטח המשולש  $CEF$ .  
 ג. המשך  $DF$  חותך את  $AB$  בנקודה  $G$ .  
 הבע באמצעות  $S$  את שטח המשולש  $BFG$ .

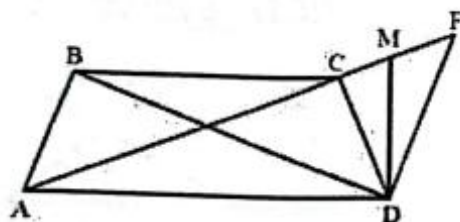


במשולש שווה-שוקיים  $ABC$  ( $AC = AB$ )  
 חסום מלבן  $GFED$  כך שהקדקודים  $D$  ו- $E$   
 מונחים על הצלע  $AB$ , והקדקודים  $F$  ו- $G$   
 מונחים על הצלעות  $BC$  ו- $CA$  בהתאמה.  
 נקודה  $L$ , הנמצאת על צלע המלבן  $GF$ ,  
 היא מפגש התיכונים במשולש  $ABC$ .  
 דרך הנקודה  $L$  העבירו אנך לצלע  $BC$ ,  
 החותך את  $BC$  בנקודה  $K$  (ראה ציור).  
 א. הוכח:  $\triangle KAB \sim \triangle KLF \sim \triangle EFB$ .

אם נתון:  $BC = 18$  ס"מ,  $AB = 15$  ס"מ,  
 חשב:

ב. את אורך הקטע  $KF$ . נמק.  
 ג. את אורך הקטע  $FE$ . נמק.

פתרון: ב. 3 ס"מ. ג. 4.8 ס"מ.

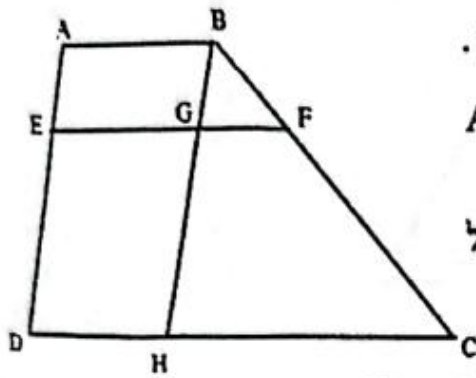


נתון טרפז שווה-שוקיים  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ).  
 דרך הקדקוד  $D$  העבירו אנך ל- $AD$   
 וישר המקביל לשוק  $AB$ .  
 האנך חותך את המשך האלכסון  $AC$   
 בנקודה  $M$ ,  
 והישר המקביל חותך את המשך  
 האלכסון בנקודה  $F$  (ראה ציור).

נסמן:  $\angle CAD = \beta$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .  
 א. הוכח כי:  $\triangle ABC \sim \triangle FDA$ .  
 ב. הוכח כי:  $\angle CDM = \angle MDF$ .

ג. הוכח כי:  $\frac{AC}{AF} = \frac{MC}{MF}$ .





8) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).

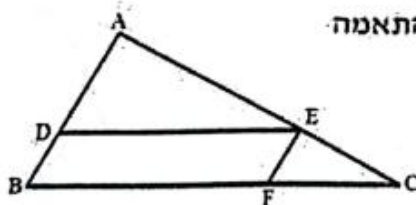
הנקודות E ו-F נמצאות על השוקיים AD ו-BC בהתאמה, כך ש-  $EF \parallel DC$ .

דרך הנקודה B מעבירים קטע BH המקביל לשוק AD. הקטע BH חותך את EF בנקודה G (ראה ציור).

נתון:  $ED = 4AE$ ,  $AB = 2AE$ ,  $AE = GF$ .

- השב את היהס בין שטח המשולש BGF לשטח המרובע GFCH.
- השב את היהס בין שטח המרובע ABGE לשטח המרובע EGHD.
- השב את היהס בין שטח המשולש BGF לשטח המרובע ABGE.
- בנקודה G מורידים אנך לקטע BF, החותך אותו בנקודה K ( $GK \perp BF$ ).  
נתון:  $BK = 3$  ס"מ,  $GK = 4$  ס"מ.  
השב את ההיקף ואת השטח של הטרפז ABCD.

פתרון: א.  $\frac{1}{24}$  ב.  $\frac{1}{4}$  ג.  $\frac{1}{4}$  ד. היקף הטרפז: 100 ס"מ, שטח הטרפז: 540 סמ"ר.

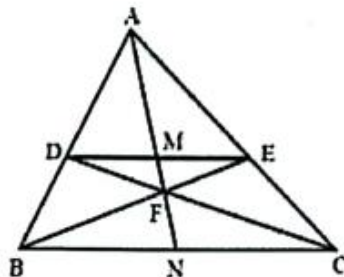


9) נתון משולש ABC. הנקודות D, E ו-F נמצאות על הצלעות AB, AC ו-BC בהתאמה כך ש-  $DE \parallel BC$  ו-  $FE \parallel BA$  (ראה ציור).

א. נתון: שטח המשולש ADE הוא  $S_1$ , שטח המשולש EFC הוא  $S_2$ .  
הבע באמצעות  $S_1$  ו-  $S_2$  את היחס  $\frac{BF}{FC}$ . נמק.

ב. הוכח כי שטח המשולש BEF שווה ל-  $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$ .

פתרון: א.  $\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$

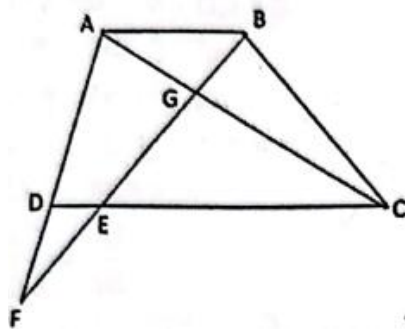


10) במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC בהתאמה כך ש-  $DE \parallel BC$ . BE ו-CD נחתכים בנקודה F. AF חותך את DE בנקודה M, והמשכו חותך את BC בנקודה N (ראה ציור).

הוכח: א.  $\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$

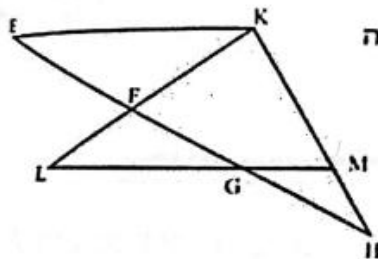
ב.  $\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}$

ג.  $BN = CN$  ו-  $DM = EM$



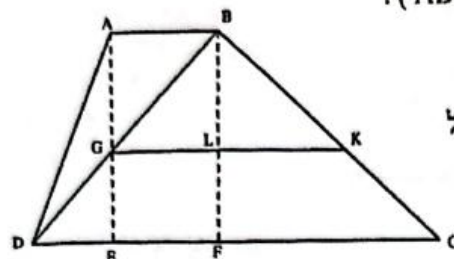
- 11) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ). הנקודה E נמצאת על הבסיס הגדול DC. המשיך הקטע BE חותך את המשיך השוק AD בנקודה F (ראה ציור). נתון:  $\angle BAC = \angle DFE$ .
- א. מצא משולש הדומה למשולש AFG.  
 ב. הוכח:  $AD \cdot AF = AG \cdot AC$ .  
 ג. נתון:  $FA = 2AG$ ,  $3CG = 5AG$ .  
 חשב את היחס:  $\frac{DE}{AB}$ .
- ג. 1) פי כמה גדול אורך הקטע EC מאורך הקטע DE?  
 2) פי כמה גדול שטח הטרפז ABED משטח המשולש FDE?  
 3) שטח המשולש FDE הוא 30 סמ"ר. מהו שטח הטרפז ABCD?

פתרון: א. 1) מהולש ACD ב.  $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{3}$  ג. 1)  $EC = 5 \cdot DE$  2) פי 8 3) 540 סמ"ר



- 12) נתון משולש KHE. נקודות M ו-G נמצאות על הצלעות KH ו-EH בהתאמה כך ש-  $GM \parallel EK$ . נקודה F נמצאת על הצלע EH המשיכי הקטעים GM ו-FK נפגשים בנקודה L (ראה ציור). נתון:  $\angle KML = \angle KFH$ . א. הוכח כי  $\triangle KHE \sim \triangle FLG$ . ב. נתון גם:  $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$ ,  $EH = 12.5$  ס"מ,  $LG = 5$  ס"מ. 1) מצא את האורך של EK. 2) מצא את היחס  $\frac{MH}{KH}$ .

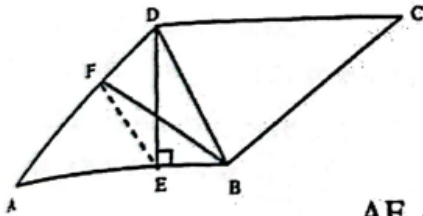
פתרון: ב. 1)  $EK = 7.5$  ס"מ 2)  $\frac{MH}{KH} = \frac{2}{5}$



- 13) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ). נתון:  $GK \parallel DC$ ,  $BF \perp DC$ . נקודת החיתוך של גובה AE עם האלכסון DB, נקודת החיתוך של BF עם GK (ראה ציור). א. הוכח:  $\frac{BL}{BF} = \frac{GK}{DC}$ . ב. נתון:  $BD = BC$ ,  $GK = 2GE$ ,  $AE = 12$  ס"מ. a ס"מ  $DC$ . בטא בעזרת a את היחס בין בסיסי הטרפז. ג. נתון:  $a = 18$  ס"מ. פי כמה גדול שטח המשולש ABDC משטח המשולש ABD?

פתרון: ב.  $\frac{AB}{DC} = \frac{12}{24+a}$  ג. פי 3.5

## טריגונומטריה תרגילים



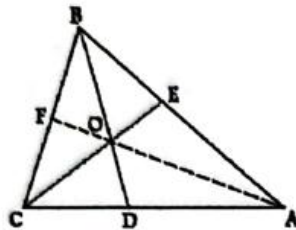
14) המרובע ABCD הוא מעוין שצלעו 12 ס"מ.  
נתון:  $\angle A = 2\alpha$ ,  $DE \perp AB$ ,  $BF \perp AC$  חוצה את הזווית ABD (ראה ציור).

- א. הבע באמצעות  $\alpha$  את זוויות המשולש ABF.
- ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את אורכי הקטעים AF ו-AE.
- ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המשולש AFE.
- ד. נתון כי שטח המעוין הוא 72 סמ"ר. חשב את שטח המשולש AFE.

פתרון: א.  $\angle AFB = 180^\circ - (2\alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 135^\circ - 1.5\alpha \Leftarrow \angle ABF = \angle DBF = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$

ב.  $AE = 12 \cos 2\alpha$   $AF = \frac{12 \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(135^\circ - 1.5\alpha)}$

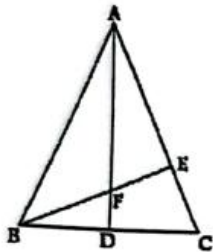
ג.  $\frac{72 \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) \cos 2\alpha \sin 2\alpha}{\sin(135^\circ - 1.5\alpha)}$  ד. 20.54 סמ"ר.



1. הישרים BD ו-CE חוצי זוויות חבסיס במשולש שווה השוקיים  $\triangle ABC$ . המשכו של הישר AO חותך את חבסיס BC בנקודה F. נתון:  $BC = 2k$ . הקטע CO ארוך פי 1.3 מהקטע CF.
  - א. הבע באמצעות k את שטח המשולש  $\triangle BEO$ .
  - ב. נתון ששטח המשולש  $\triangle BEO$  הוא 56 סמ"ר. חשב את היקף המשולש  $\triangle ABC$ .

פתרון: א.  $0.607k^2$  ב. 123.86 ס"מ.

2. הישרים AD ו-BE הם גבהים במשולש שווה השוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB = AC$ ). נסמן:  $\angle ACB = \alpha$ ,  $AC = AB = a$ .

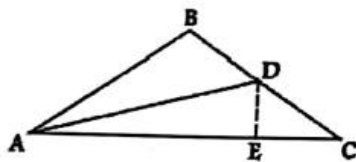


א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו-a את היחס בין שטחי המשולשים:  $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}}$

ב. חשב את היחס  $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}}$  בהינתן ש:  $\alpha = 45^\circ$ .

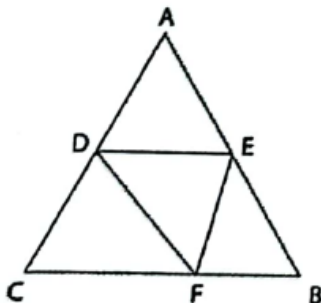
ג. ללא קשר לסעיף ב', נתון:  $S_{\triangle BCF} = 3 \cdot S_{\triangle ABD}$ . חשב את הזווית  $\alpha$ .

פתרון: א.  $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}} = 4 \cos^2 \alpha$  ב.  $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}} = 2$  ג.  $\alpha = 30^\circ$



3. נתון המשולש שווה השוקיים  $\triangle ABC$  ( $BC = AB$ ) ששטחו 45 סמ"ר. נתון:  $\angle ABC = 110^\circ$ . הישר AD חוצה את הזווית  $\angle BAC$ . מהנקודה D יוצא ישר המאונך לבסיס AC וחותך אותו בנקודה E. חשב את:
  - א. שטח המשולש  $\triangle AED$ .
  - ב. היקף המשולש  $\triangle AED$ .
  - ג. היקף המשולש  $\triangle ABD$ .

פתרון: א. 19.23 סמ"ר. ב. 26.11 סמ"ר. ג. 25.06 סמ"ר.



4. במשולש  $\triangle ABC$  שווה הצלעות שהיקפו 36 סמ"ר נתון:  $CF = 2BF$ . הנקודות E ו-D הן אמצעי הצלעות AB ו-AC בהתאמה. חשב את:
  - א. זוויות המשולש  $\triangle DEF$ .
  - ב. שטח המשולש  $\triangle DEF$ .

פתרון: א.  $79.1^\circ, 54.79^\circ, 46.1^\circ$  ב. 15.58 סמ"ר.